# FISICA CUANTICA II

## EXAMEN DE JUNIO, PROBLEMAS

CURSO 2024/2025 26 de Junio de 2025

*Los números entre corchetes indican el valor de cada apartado. Este examen cuenta un 75% de la nota.*

**1**[3].- Un sistema de dos niveles tiene el siguiente hamiltoniano dependiente del tiempo:

$$H(t) = \begin{cases} -\hbar\sigma_3, & \text{si } t \leq T, \\ 2\hbar\sigma_3, & \text{si } t > T. \end{cases}$$

siendo $T > 0$. En el instante inicial $t = 0$ se mide el observable $\sigma_1$ y se obtiene el valor $+1$. Despues de la medida el sistema evoluciona temporalmente hasta que en el instante $t = 2T$ se mide el observable $\sigma_2$. ¿Cual es el valor medio de los resultados de esta segunda medida?.

**2**[3]. Un oscilador armonico unidimensional de masa $m$ y frecuencia $\omega$ se encuentra en el instante inicial $t = 0$ en el estado:

$$|\psi\rangle = \frac{C}{2+a}|2\rangle \ ,$$

siendo $C$ una constante de normalizacion, $a$ el operador escalera de aniquilacion del oscilador y $|2\rangle$ el segundo estado excitado del oscilador.

a) Obtengase la constante de normalizacion $C$.

b) Obtengase el valor medio de la posicion del oscilador en el instante $t = 0$.

**3**[4].- El hamiltoniano de una particula de espin 1 es:

$$H = \frac{\epsilon}{\hbar^2}\left(S_+^2 + S_-^2\right) \ ,$$

donde $\epsilon$ es una constante real y $S_\pm = S_1 \pm iS_2$ ($S_1$ y $S_2$ son las componentes del operador de espin de la particula en las direcciones 1 y 2 respectivamente). En el instante inicial $t = 0$ se mide la componente $S_2$ del espin y se obtiene su valor maximo.

a) Determinese el estado del sistema en un instante de tiempo $t > 0$.

b) Obtengase los valores del tiempo $t$ para los cuales el valor medio de $S_2$ toma su valor minimo.

Un sistema de dos niveles tiene el siguiente hamiltoniano dependiente del tiempo:

$$H(t) = \begin{cases} -\hbar\sigma_3 & \text{si} \quad t \leq T \\ 2\hbar\sigma_3 & \text{si} \quad t > T \end{cases}$$

siendo $T > 0$. En el instante inicial $t=0$ se mide el observable $\sigma_1$ y se obtiene el valor $+1$. Despues de la medida el sistema evoluciona temporalmente hasta que en el instante $t = 2T$ se mide el observable $\sigma_2$. ¿Cual es el valor medio de los resultados de esta segunda medida?.

---

Evolucion entre $t=0$ y $t=T$

$$U(T,0) = \exp\left[-\frac{i}{\cancel{\hbar}}(-\cancel{\hbar}\sigma_3)T\right] = \exp\left[iT\sigma_3\right]$$

Evolucion entre $t=T$ y $t=2T$

$$U(2T,T) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(2\hbar\sigma_3)T\right] = \exp\left[-2iT\sigma_3\right]$$

Evolucion entre $t=0$ y $t=2T$

$$\boxed{U(2T,0) = U(2T,T)\,U(T,0) = e^{-2iT\sigma_3}\,e^{iT\sigma_3}}$$

$|\psi(0)\rangle \rightarrow$ autoestado de $\sigma_1$ con autovalor $+1$

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$|\psi(2T)\rangle = e^{-2iT\sigma_3}\, e^{iT\sigma_3}\, |\psi(0)\rangle$$

$$e^{iT\sigma_3} = \cos(T) + i\,\mathrm{sen}(T)\,\sigma_3$$

$$e^{iT\sigma_3}|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos(T)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + i\,\mathrm{sen}(T)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right] \Rightarrow$$

$$\sigma_3\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A\\-B\end{pmatrix}$$

$$\boxed{e^{iT\sigma_3}|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{iT}\\e^{-iT}\end{pmatrix}}$$

$$|\psi(2T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-2iT\sigma_3}\begin{pmatrix}e^{iT}\\e^{-iT}\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos(2T) - i\,\mathrm{sen}(2T)\,\sigma_3\right]\begin{pmatrix}e^{iT}\\e^{-iT}\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(2T)\begin{pmatrix}e^{iT}\\e^{-iT}\end{pmatrix} - i\,\mathrm{sen}(2T)\begin{pmatrix}e^{iT}\\-e^{-iT}\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{iT}e^{-2iT}\\e^{-iT}e^{2iT}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\psi(2T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{-iT}\\e^{iT}\end{pmatrix} \Rightarrow \langle\psi(2T)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{iT}, e^{-iT}\right)$$

$$\sigma_2|\psi(2T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-iT}\\e^{iT}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i\,e^{iT}\\ i\,e^{-iT}\end{pmatrix}$$

$$\langle\sigma_2\rangle_{t=2T} = \langle\psi(2T)|\sigma_2|\psi(2T)\rangle = \frac{1}{2}\left(-i\,e^{2iT} + i\,e^{-2iT}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{2iT} - e^{-2iT}\right) \Longrightarrow \boxed{\langle\sigma_2\rangle_{t=2T} = \mathrm{sen}(2T)}$$

Un oscilador armonico unidimensional de masa m y frecuencia $\omega$ se encuentra en el instante $t=0$ en el estado

$$|\psi\rangle = \frac{c}{2+a}|2\rangle$$

siendo $C$ una constante de normalizacion, $a$ el operador escalera de aniquilacion y $|2\rangle$ el segundo estado excitado del oscilador

1) Obtengase la constante de normalizacion $C$
2) Obtengase el valor medio de la posicion del oscilador en el instante $t=0$.

---

1)
$$|\psi\rangle = \frac{c}{2+a}|2\rangle = \frac{c}{2}\frac{1}{1+\frac{1}{2}a}|2\rangle =$$

$$= \frac{c}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (a)^n |2\rangle = \frac{c}{2}\Big[|2\rangle - \frac{1}{2}\underbrace{a|2\rangle}_{\sqrt{2}|1\rangle} + \frac{1}{4}\underbrace{a^2|2\rangle}_{a\sqrt{2}|1\rangle = \sqrt{2}|0\rangle}\Big]$$

$$\Rightarrow \boxed{|\psi\rangle = \frac{c}{2}\left[|2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|0\rangle\right]}$$

Normalizacion

$$\frac{c^2}{4}\underbrace{\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right]}_{\frac{8+4+1}{8} = \frac{13}{8}} = 1 \Rightarrow c^2\frac{13}{32} = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{13}} \rightarrow \boxed{c = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{13}}}$$

$$|\psi\rangle = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{13}}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + |2\rangle\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{13}}\left(\frac{1}{2}|0\rangle - |1\rangle + \sqrt{2}|2\rangle\right)}$$

2)

$$X = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,(a + a^+)$$

$$a|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{13}}\left(\frac{1}{2}\cancel{a|0\rangle} - \underbrace{a|1\rangle}_{|0\rangle} + \sqrt{2}\underbrace{a|2\rangle}_{\sqrt{2}|1\rangle}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{13}}\left(-|0\rangle + 2|1\rangle\right)}$$

$$a^+|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{13}}\left[\frac{1}{2}\underbrace{a^+|0\rangle}_{|1\rangle} - \underbrace{a^+|1\rangle}_{\sqrt{2}|2\rangle} + \sqrt{2}\underbrace{a^+|2\rangle}_{\sqrt{3}|3\rangle}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{a^+|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{13}}\left[\frac{1}{2}|1\rangle - \sqrt{2}|2\rangle + \sqrt{6}|3\rangle\right]}$$

$$\Rightarrow \boxed{(a + a^+)|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{13}}\left(-|0\rangle + \frac{5}{2}|1\rangle - \sqrt{2}|2\rangle + \sqrt{6}|3\rangle\right)}$$

$$\langle X\rangle_\psi = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,\langle\psi|(a + a^+)|\psi\rangle$$

$$\langle \psi | (a+a^{\dagger}) | \psi \rangle =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{13}} \left( \tfrac{1}{2} \langle 0| - \langle 1| + \sqrt{2} \langle 2| \right) \frac{2}{\sqrt{13}} \left( -|0\rangle + \tfrac{5}{2} |1\rangle - \sqrt{2} |2\rangle + \cancel{\sqrt{6}\, |3\rangle} \right) =$$

$$= \frac{4}{13} \left( -\tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{2} - 2 \right) = -\frac{4}{13} \left( \frac{1+5+4}{2} \right) = -\frac{4}{13} \, \frac{10}{2} =$$

$$= -\frac{4}{13} \cdot 5 = -\frac{20}{13}$$

$$\boxed{\langle \psi | (a+a^{\dagger}) | \psi \rangle = -\frac{20}{13}}$$

$$\langle x \rangle_{\psi} = -\frac{20}{13} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\langle x \rangle_{\psi} = -\frac{20\sqrt{2}}{13} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}}$$

El hamiltoniano de una particula de espin 1 es:

$$H = \frac{\varepsilon}{\hbar^2}\left(S_+^2 + S_-^2\right)$$

donde $\varepsilon$ es una constante real y $S_\pm = S_x \pm i S_y$. En el instante inicial $t=0$ se mide la componente $S_y$ del espin y se obtiene su valor maximo.

1) Determinese el estado del sistema en un instante de tiempo $t>0$.

2) Obtenganse los valores de $t$ para los cuales el valor medio de $S_y$ toma su valor minimo

---

1) Base para espin 1 $\Rightarrow \{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$
$\rightsquigarrow$ estados con $S_z = \hbar, 0, -\hbar$.

Valor maximo de $S_y = \hbar \Rightarrow$ estado $|1,1\rangle_y$.
$\rightarrow$ Del problema 11, cap. 6 de problemas resueltos

$$\boxed{|\psi(0)\rangle = |1,1\rangle_y = \frac{1}{2}|1,1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1,0\rangle - \frac{1}{2}|1,-1\rangle}$$

Para comprobarlo, recordamos

$$S_+|1,m\rangle = \hbar\sqrt{2-m(m+1)}\,|1,m+1\rangle \Rightarrow$$

$$\boxed{S_+|1,1\rangle = 0 \quad , \quad S_+|1,0\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|1,1\rangle \qquad S_+|1,-1\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|1,0\rangle}$$

$$S_-|1,m\rangle = \hbar\sqrt{2-m(m-1)}\,|1,m-1\rangle$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} S_-|1,-1\rangle = 0 & S_-|1,0\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|1,-1\rangle \\ & S_-|1,1\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|1,0\rangle \end{array}}$$

$$S_-|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{2}\,|1,0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\hbar\sqrt{2}\,|1,-1\rangle$$

$$S_+|\psi(0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\hbar\sqrt{2}\,|1,1\rangle - \frac{1}{2}\hbar\sqrt{2}\,|1,0\rangle$$

$$\boxed{S_y|\psi(0)\rangle} = -\frac{i}{2}(S_+ - S_-)\,|\psi(0)\rangle =$$

$$= (-i/2)\,\hbar\sqrt{2}\left[\frac{i}{\sqrt{2}}|1,1\rangle \underbrace{-\frac{1}{2}|1,0\rangle - \frac{1}{2}|1,0\rangle}_{-|1,0\rangle} - \frac{i}{\sqrt{2}}|1,-1\rangle\right] =$$

$$= \hbar\left[\frac{1}{2}|1,1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1,0\rangle - \frac{1}{2}|1,-1\rangle\right] = \boxed{\hbar\,|\psi(0)\rangle} \to \underline{\text{OK!}}$$

**Accion de $S_+^2$**

$$S_+^2|1,1\rangle = S_+^2|1,0\rangle = 0\,, \qquad S_+^2|1,-1\rangle = 2\hbar^2|1,1\rangle$$

**Accion de $S_-^2$**

$$S_-^2|1,1\rangle = 2\hbar^2|1,-1\rangle\,, \qquad S_-^2|1,0\rangle = S_-^2|1,-1\rangle = 0$$

$\Rightarrow$ Accion de H sobre la base

$$H|1,1\rangle = \frac{2\hbar^2\varepsilon}{\hbar^2}|1,-1\rangle \qquad H|1,0\rangle = 0$$

$$H|1,-1\rangle = \frac{2\hbar^2\varepsilon}{\hbar^2}|1,1\rangle$$

## Auto estados

$$|\pm 2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,1\rangle \pm |1,-1\rangle\right) \quad , \quad |0\rangle = |1,0\rangle$$

$$H|\pm 2\rangle = \pm 2\varepsilon\, |\pm 2\rangle \qquad H^2|0\rangle = 0$$

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\underbrace{\left(|1,1\rangle - |1,-1\rangle\right)}_{\sqrt{2}\,|-2\rangle} + \frac{i}{\sqrt{2}}\underbrace{|1,0\rangle}_{|0\rangle}$$

$\Rightarrow$ En terminos de autoestados de H $|\psi(0)\rangle$ es

$$\boxed{|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|-2\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|0\rangle}$$

## Evolucion temporal

$$|-2\rangle \rightarrow e^{-i/\hbar(-2\varepsilon)t}|-2\rangle = e^{\frac{2i\varepsilon t}{\hbar}}|-2\rangle$$

$$|0\rangle \longrightarrow |0\rangle$$

$$\Rightarrow \quad |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{\frac{2i\varepsilon t}{\hbar}}|-2\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|0\rangle$$

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}e^{\frac{2i\varepsilon t}{\hbar}}|1,1\rangle - \frac{1}{2}e^{\frac{2i\varepsilon t}{\hbar}}|1,-1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1,0\rangle}$$

2)

$$S_y|1,1\rangle = -\frac{i}{2}(\cancel{S_+} - S_-)|1,1\rangle \Rightarrow \boxed{S_y|1,1\rangle = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}|1,0\rangle}$$

$$S_y|1,0\rangle = -\frac{i}{2}(S_+ - S_-)|1,0\rangle = -\frac{i}{2}\hbar\sqrt{2}\left(|1,1\rangle - |1,-1\rangle\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{S_y|1,0\rangle = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2}}|1,1\rangle + \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}|1,-1\rangle}$$

$$S_y|1,-1\rangle = -\frac{i}{2}(S_+ - \cancel{S_-})|1,-1\rangle = -\frac{i}{2}\hbar\sqrt{2}|1,0\rangle$$

$$\boxed{S_y|1,-1\rangle = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2}}|1,0\rangle}$$

Entonces

$$S_y|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}e^{\frac{2i\varepsilon t}{\hbar}}\frac{i\hbar}{\sqrt{2}}|1,0\rangle - \frac{1}{2}e^{\frac{2i\varepsilon t}{\hbar}}\left(-\frac{i\hbar}{\sqrt{2}}|1,0\rangle\right) +$$

$$+\frac{i}{\sqrt{2}}\left(-\frac{i\hbar}{\sqrt{2}}|1,1\rangle + \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}|1,-1\rangle\right)$$

$$\boxed{S_y|\psi(t)\rangle = \hbar\left[\frac{1}{2}|1,1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{\frac{2i\varepsilon t}{\hbar}}|1,0\rangle - \frac{1}{2}|1,-1\rangle\right]}$$

$$\langle\psi(t)| = \frac{1}{2}e^{-\frac{2i\varepsilon t}{\hbar}}\langle 1,1| - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle 1,0| - \frac{1}{2}e^{-\frac{2i\varepsilon t}{\hbar}}\langle 1,-1|$$

$$\langle S_y\rangle_{\psi(t)} = \langle\psi(t)|S_y|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{4}e^{-\frac{2i\varepsilon t}{\hbar}} + \frac{\hbar}{2}e^{\frac{2i\varepsilon t}{\hbar}} + \frac{\hbar}{4}e^{-\frac{2i\varepsilon t}{\hbar}} =$$

$$= \frac{\hbar}{2}e^{-\frac{2i\varepsilon t}{\hbar}} + \frac{\hbar}{2}e^{\frac{2i\varepsilon t}{\hbar}} = \frac{\hbar}{\cancel{2}}\cancel{2}\cos\left(\frac{2\varepsilon t}{\hbar}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle S_y\rangle_{\psi(t)} = \hbar\cos\left(\frac{2\varepsilon t}{\hbar}\right)}$$

El valor mínimo de $\langle S_y\rangle$ es $-\hbar$ $\Rightarrow$ ocurre para un $t_n$ / $\cos\left(\frac{2\varepsilon t_n}{\hbar}\right) = -1$ $\Rightarrow$

$$\frac{2\varepsilon t_n}{\hbar} = (2n+1)\pi \Rightarrow \boxed{t_n = (n+1/2)\frac{\pi\hbar}{\varepsilon}}$$

$n = 0, 1, 2,$